RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE

Épreuve préparatoire - Décembre 2009

2°

Formule « Groupes » Exercices 5 - 6 - 7 et 8

Formule « Classes » Exercices 1 à 8

Exercice n°1 — A la queue leu-leu

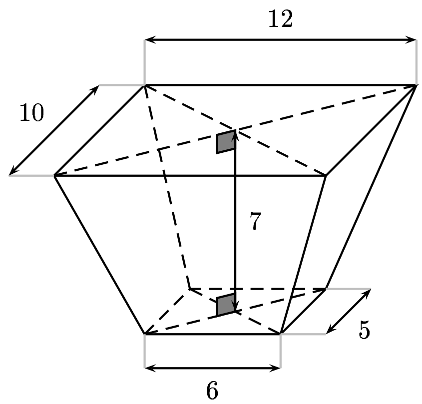
5 points

On écrit à la suite les uns des autres, à partir de 1, les nombres entiers : 12345678910111213...
Quel est le 2009$^{\text{ème}}$ chiffre de la liste ?

Exercice n°2 — D'après Bhaskara

8 points

Le mathématicien hindou Bhaskara (XIIe siècle) explique, dans son traité « La Lilavati » , comment calculer le contenu d'une excavation en forme de tronc de pyramide, à bases rectangulaires parallèles, dont les dimensions sont celles de la figure ci-contre.
Bhaskara donne en toutes lettres sa méthode de calcul : « *La somme des aires des bases et de l'aire d'un rectangle de largeur la somme des largeurs des bases et de longueur la somme des longueurs des bases, étant divisée par six puis multipliée par la profondeur, donne le volume* » .
Calculer le volume de cette excavation par la méthode de Bhaskara.
Calculer le volume de ce tronc de pyramide en le considérant comme la différence des volumes de deux pyramides.
Comparer les deux résultats.



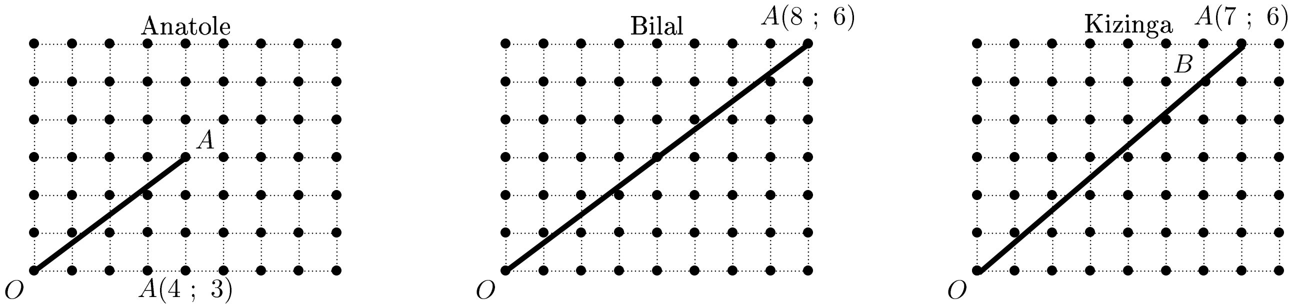
Exercice n°3 — Jeu en réseau

8 points

Lors d'un concours mathématique, chaque participant choisit à sa guise l'un des points d'un quadrillage que l'on note A. Ce point A est repéré par ses coordonnées (voir ci-dessous). Il trace ensuite le segment $[OA]$, le point O étant le point inférieur gauche du quadrillage, de coordonnées $(0\ ;\ 0)$.
On note alors :

- L la longueur du segment $[OA]$, arrondie au dixième (l'unité de longueur choisie est le côté d'un carré du quadrillage) ;
- N le nombre de points du quadrillage qui se trouvent sur le segment $[OA]$ (y compris ses deux extrémités O et A).

Le score de chaque participant est $S = 10L - 10N$. Le gagnant est celui qui réalise le plus grand score.
Anatole, Bilal et Kizinga font les propositions suivantes :



1. Kizinga affirme : « Mon segment contient deux points du quadrillage : les points O et A. ».
   Bilal répond : « Non, ton segment contient trois points du quadrillage : les points O, A et B $(6\ ;\ 5)$ sont alignés ! ».
   Qui a raison ? *Justifier autrement que par un dessin.*
2. Montrer que Anatole a 30 points et Kizinga a 72 points. Combien de points a Bilal ?
3. Pourriez-vous obtenir un meilleur score que ces trois concurrents ?

Exercice n°4 — Oeufs pourris, l'art de décaler l'alphabet

5 points

L'objectif d'un code secret, c'est de pouvoir transmettre des informations que « l'ennemi » ne pourra pas comprendre... ou qu'il aura tellement de difficultés à comprendre que lorsqu'il aura trouvé la clé du code, l'événement auquel il est fait allusion dans le message aura eu lieu.
Des mathématiciens très éminents ont été amenés à casser des codes.
La clé de celui qui est proposé dans cet exercice est contenue dans le jeu de mots du titre de l'exercice.
Casser ce code.

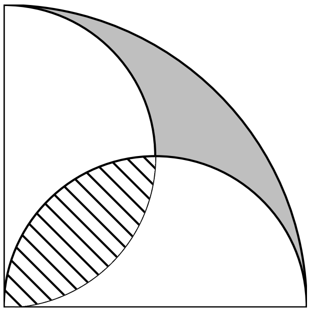
EH BWQP WPPAJZNA Z'WRKEN PNWRANOA PKQPA HW NEREANA WRWJP
ZA ZENA MQA HA YNKYKZEHA W QJA OWHA CQAQHA

(Proverbe africain)

Exercice n°5 — Quart de rond

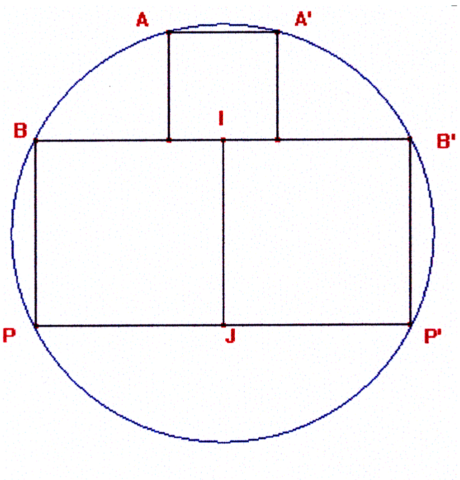
5 points

Comparer l'aire du domaine hachuré et l'aire du domaine grisé.



Exercice n°6 — Gare au centre !

5 points



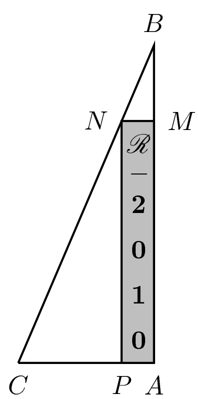
La figure ci-contre (qui ne respecte pas une échelle) représente un assemblage symétrique de trois carrés dont les mesures des côtés sont $AA' = 2$ cm et $BP = B'P' = 3,5$ cm. On a tracé le cercle qui passe par les points A, B, B' et A'.
Ce cercle passe-t-il vraiment par les points P et P' ?

Exercice n°7 — Le logo du mécène

8 points

Nemo possède une planche à voile. La voile qui équipe sa planche a la forme d'un triangle ABC rectangle en A avec $AB = 4{,}2$ m et $AC = 1{,}8$ m.
Pour pouvoir participer à la célèbre régate de Trainou-plage, il décide de porter les couleurs du Rallye mathématique du Centre.
Le logo du mécène a une forme rectangulaire (le rectangle $MNPA$ sur le dessin avec $N \in [BC]$, $M \in [AB]$, $P \in [AC]$).

1. Quelle est l'aire du rectangle $MNPA$ lorsque $BM = 1$ m ?
2. Quelle est l'aire du rectangle $MNPA$ lorsque $BM = 3$ m ?
3. Quelles doivent être les dimensions du rectangle $MNPA$ pour que le logo ait une aire maximale ?



Exercice n°8 **En avant toutes !**

8 points

1. Construire, sur la feuille réponse, le parcours correspondant au programme ci-dessous :

   Données: On se positionne sur l'étoile ✶ ;
   On regarde dans le sens indiqué par la flèche ;
   Répéter *6 fois*
   | Avancer de 1 cm ;
   | Pivoter de 60 degrés vers la gauche ;
   fin de répéter

2. Construire, sur la feuille réponse, le parcours correspondant au programme ci-dessous :

   Données: $k = 0$;
   On se positionne sur l'étoile ✶ ;
   On regarde dans le sens indiqué par la flèche ;
   Avancer de 1 cm ;
   Pivoter de 120 degrés vers la gauche ;
   Avancer de 1 cm ;
   Répéter *3 fois*
   | **si** k *est pair* **alors**
   | | Pivoter de 60 degrés vers la gauche ;
   | | Avancer de 1 cm ;
   | | Pivoter de 120 degrés vers la gauche ;
   | | Avancer de 1 cm ;
   | | Pivoter de 60 degrés vers la gauche ;
   | | Avancer de 1 cm ;
   | **sinon**
   | | Pivoter de 120 degrés vers la droite ;
   | | Avancer de 1 cm ;
   | | Pivoter de 60 degrés vers la droite ;
   | | Avancer de 1 cm ;
   | | Pivoter de 120 degrés vers la droite ;
   | | Avancer de 1 cm ;
   | **fin**
   | k augmente de 1 ;
   fin de répéter

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.
Bon courage et rendez-vous le 9 mars pour l'épreuve officielle.

Exercice n°8 **En avant toute !**

Feuille réponse