Rallye 1998
Épreuve préparatoire
Solutions

Exercice n° 1 : (5 points)

Ballon de football

Les 12 pentagones ont en tout 60 côtés et les 20 hexagones 120 côtés.

Chaque arête est commune exactement à deux faces.

Il y a donc (60+120)/2 = 90 arêtes.

La couture a donc une longueur de 90×4,5 = 405 (en cm)

Exercice n° 2 : (5 points)

La bonne règle

La règle placée en diagonale peut mesurer au maximum $45\sqrt{2} - 4 \approx 59{,}6$ (en cm)

Exercice n° 3 : (5 points)

Histoire de sécher

La matière sèche représente 1% de la masse des fruits frais et 2% de la nouvelle masse x cherchée, d'où :

$$\frac{2}{100}x = \frac{1}{100}\times 3 \qquad x = 1{,}5\,kg$$

Exercice n° 4 : (5 points)

1997

Le nombre doit commencer par le plus grand nombre possible de chiffres "9",

soit 221 (1997 = 221×9 + 8) soit : $\underbrace{999\ldots\ldots9}_{221}8\underbrace{000\ldots0}_{1775}$

Exercice n° 5 : (8 points)

Prendre de la hauteur

1ère solution : le récipient repose sur sa face carrée et la hauteur de l'eau est de 25 cm.

Le côté du carré mesure $\sqrt{\frac{3600}{25}} = 12$ (en cm) . Le récipient reposant maintenant sur une des autres faces rectangulaires avec une hauteur d'eau de 4 cm, l'autre dimension du récipient est égale à [(3600 : 4) : 12] = 75 (en cm)

D'où la solution : (12 cm ; 30 cm ; 4,8 cm)

2ème solution : le récipient repose sur sa face carrée et la hauteur de l'eau est de 4 cm.

Le côté du carré mesure $\sqrt{\frac{3600}{4}} = 30$ (en cm) . Le récipient reposant maintenant sur une des autres faces rectangulaires avec une hauteur d'eau de 4 cm, l'autre dimension du récipient est égale à [(3600 : 25) : 30] = 4,8 (en cm)

D'où la solution : (30 cm ; 30 cm ; 4,8 cm)

Exercice n° 6 : (8 points)

Passer au vert

Le premier réservoir cylindrique formé par M Laverdure a pour base un cercle de circonférence y (en m) et de hauteur x (en m), de contenance $V_1 = \pi\ x\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 = \frac{xy^2}{4\pi}$.

Le second réservoir cylindrique, obtenu en échangeant x et y, a pour contenance : $V_2 = \frac{x^2y}{4\pi}$.

V_2 est supérieur de 20% à V_1 on a donc $V_2 = V_1\left(1+\frac{20}{100}\right) = 1{,}2V_1$

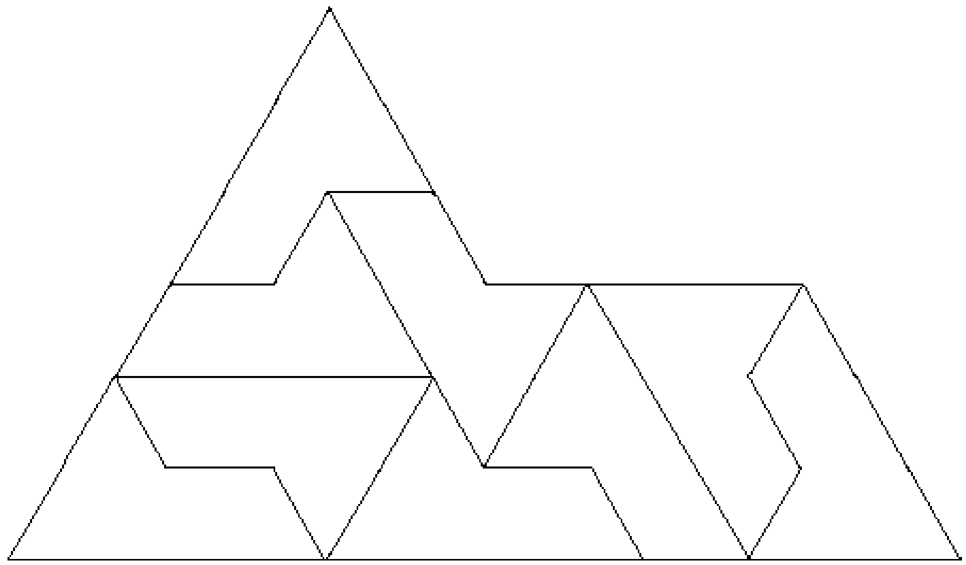
donc $\frac{V_2}{V_1} = 1{,}2$ et $\frac{x}{y} = 1{,}2$.

En résolvant le système $\begin{cases} x \times y = 2{,}70 \\ x = 1{,}2y \end{cases}$ on trouve $y = 1{,}5$ et $x = 1{,}8$ (en m)

D'où le nouveau volume : $V_2 = \frac{1{,}8^2 \times 1{,}5}{4\pi} = \frac{1{,}215}{\pi} \approx 386{,}75$ (en dm^3).

Exercice n° 7 : (5 points)

Le sphinx



Exercice n° 8 : (5 points)

Nombres croisés

	A	B	C
1	1	4	4
2	5	2	3
3	7	1	5

Exercice n° 9 : (5 points)

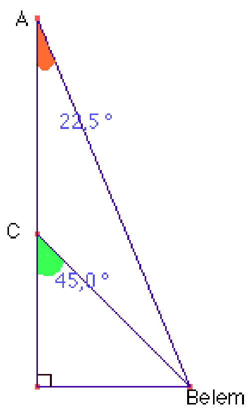
L'âge du capitaine

Répartition	*effectifs en ligne*	*effectifs cumulés*
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09	45	45
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19	45 + 10 ×1 = 55	45 + 55 = 100
20 21 22 ...	45 + 10 ×2 = 65	100 + 65 = 165
		165 + 75 = 240
		240 + 85 = 325
		325 + 95 = 420
60 61 62 63 64 65 66 67 68 69	45 + 10 ×6 = 105	420 + 105 = 525
70 71 72 73 74 75 76 77	28 + 8 ×7 = 84	525 + 84 = 609

Le capitaine a 77 ans

Exercice n° 10 : (5 points)

Belem en rade



Le triangle ACB est isocèle en C d'où AC = CB.

Michel est à 5 milles marins du Belem.

Exercice n° 11 : (12 points)

QCM

1 (B) 2 (D) 3 (C) 4 (D) 5 (C) 6 (C)

Exercice n° 12 : (5 points)

Spécial seconde

Machine sans compter

Soit t le temps (en heure) mis par Pierre pour escalader la colline, il redescend celle ci deux fois plus vite, en un temps t/2.

Il a marché sur le plateau pendant 5 - 1,5t

Soit d la longueur de la randonnée (en km) : d = 3t + 4[5-1,5t] +6(t/2)

d = 20 (en km)

Exercice n° 13 : (8 points)

Spécial seconde

Les deux fourmis

Distance parcourue par la première fourmi parcourant l'arc $\overset{\frown}{AB}$: $\pi AS \sin\alpha$

Distance parcourue par la deuxième fourmi : $AC + CD + DB = 2AC + \pi SC\sin\alpha$

Les deux trajets auront la même longueur si $\pi AS \sin\alpha = 2AC + \pi SC\sin\alpha$

$$\pi AS \sin\alpha - \pi SC\sin\alpha = 2AC$$

$$\pi\sin\alpha(AS - SC) = 2AC$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi}$$

soit pour $\alpha \approx 39{,}5°$

Exercice n° 14 : (12 points)

Spécial seconde
la recette de Kaprekar

a)

	N	G	P	D
1er tour	**212**	221	122	99
2ème	99	99	99	0
3ème	0	0	0	O stop
1er tour	**152**	521	125	396
2ème	396	963	369	594
3ème	594	954	459	495
4ème	495	954	459	495 stop
1er tour	**3233**	3332	2333	999
2ème	999	999	999	0
3ème	0	0	0	0 stop
1er tour	**1994**	9941	1499	8442
2ème	8442	8442	2448	5994
3ème	5994	9954	4599	5355
4ème	5335	5553	3555	1998
5ème	1998	9981	1899	8082
6ème	8082	8820	288	8532
7ème	8532	8532	2358	6174
8ème	6174	7641	1467	6174 stop

b) Les deux dernières différences sont nulles.

Preuve : soit "ab" un nombre de deux chiffres tel que a>b

"ab" - "ba" = 10a + b -10b - a = 9(a - b)

Les différences possibles sont des multiples de 9 (de 0 à 81).

Différences possibles obtenues à chaque tour :

1er tour	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81
2ème	0 stop	0	63	45	27	9	9	27	45	63
3ème		0 stop	27	9	45	0	0	45	9	27
4ème			45	0	9	0 stop	0 stop	9	0	45
5ème			9	0 stop	0			0	0	9
6ème			0		0 stop			0 stop	0 stop	0
7ème			0 stop							0 stop

Dans chaque cas on obtient 0 deux fois de suite, et ceci en sept tours maximum.

c)

Les deux dernières sont nulles ou égales à 495.
Preuve : soit "abc" un nombre de deux chiffres tel que a>b >c
"abc" - "cba" = 99(a - c)
Les différences possibles sont des multiples de 99 (de 0 à 891).

Différences possibles obtenues à chaque tour :

1er tour	0	99	198	297	396	495	594	693	792	891
2ème	0 stop	0	792	963	594	495 stop	495	594	693	792
3ème		0 stop	693	594	495		495 stop	495	594	693
4ème			594	495	495 stop			495 stop	495	594
5ème			495	495 stop					495 stop	495
6ème			495 stop							495 stop

On obtient 0 ou 495 deux fois de suite et ceci en six tours maximum.

d) Conjecture : les deux dernières différences sont nulles ou égales à 6174.