Eléments de correction des Olympiades académiques 2021

Exercice académique 1 : Triplets de Pythagore

A.

1.
   a. oui
   b. oui
   c. non
2. Un triplet de Pythagore très célèbre est le fameux (3, 4, 5)
   a.
   b. Il y a au moins autant de triplets de Pythagore que de valeurs de k donc il y en a une infinité.
3. $c > a$ et $c > b$.$c^2 = a^2 + b^2$ et $b > 0$ alors $c^2 > a^2$ et comme a, b *et* c sont des entiers naturels alors $c > a$ (croissance de la fonction racine carrée). De même $c > b$.

B.

1. $2uv = 4 \quad u^2 - v^2 = 3$ et $u^2 + v^2 = 5$
2. On obtient $a = 1235$, $b = 1932$ et $c = 2293$. C'est bien un triplet de Pythagore car $1932^2 + 1235^2 = 5257849 = 2293^2$
3. Démontrez que pour toutes valeurs de u et v que le triplet obtenu est bien un triplet de Pythagore.
   Étape 1 : montrer que $u^2 + v^2$ est supérieur aux deux autres valeurs
   $u^2 + v^2 > u^2 - v^2$ immédiat.
   $u^2 + v^2 > 2uv$ car $u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2 > 0$ car $u \neq v$
   Etape 2 : Montrer l'égalité de Pythagore
   $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$
4. Complétez le tableau suivant :

u\v	1	2	3	4	5	6
2	(3, 4, 5)					
3	(8, 6, 10)	(5, 12, 13)				
4	(15, 8, 17)	(12, 16, 20)	(7, 24, 25)			
5	(24, 10, 26)	(21, 20, 29)	(16, 30, 34)	(9, 40, 41)		
6	(35, 12, 37)	(32, 24, 40)	(27, 36, 45)	(20, 48, 52)	(11, 60, 61)	
7	(14, 48, 50)	(28, 45, 53)	(40, 42, 58)	(33, 56, 65)	(24, 70, 74)	(13, 84, 85)

Les triplets primitifs sont surlignés en jaune

C.

1. Voir tableau précédent
2. On sait déjà que a et b sont premiers entre eux. Il suffit de montrer que a et c puis b et c sont premiers entre eux
   Supposons qu'il existe k entier qui divise a et c. alors $a = ka'$ et $b = kb'$.
   Comme (a, b, c) est un triplet de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$ donc $k^2a'^2 + b^2 = k^2c'^2$
   Donc $b^2 = k^2(c'^2 - a'^2)$ d'où k^2 divise b^2. Donc k divise b et cela est absurde car sinon a et b ne serait pas premiers entre eux. Même raisonnement pour b et c.

D.

1.
   a. $aA - bB = 33$, $aB + bA = 56$, $cC = 65$
   b. C'est un triplet de Pythagore car $33^2 + 56^2 = 65^2 = 4225$

2. Etape 1 : montrer que $aA - bB > 0$
   Comme $a, A, b\ et\ B$ sont positifs si $a > b$ et $A > B$ alors $aA > bB$ donc $aA - bB > 0$
   Etape 2 : montrer que l'égalité de Pythagore est vérifiée
   $(aA - bB)^2 + (aB + bA)^2 = ... = (a^2 + b^2)(A^2 + B^2) = a^2A^2 + b^2B^2 + a^2B^2 + b^2A^2$
   Donc l'égalité de Pythagore est vérifiée.
3. Si (3,4,5) n'est pas premier alors il existe c et C entiers tels que $5 = cC$
   Or 5 est premier donc $c = 1$ ou $C = 1$.
   Si $c = 1$ alors $a = 0$ et $b = 1$ impossible car a,b et c ne sont pas nuls.
4. Les seuls triplets sont (4, 3, 5) et (15,8,17)
5. (36,77,85) est primitif car 36 et 77 sont premiers entre eux.
   Comme $85 = 5\times17$
   En prenant (15,8,17) et (3,4,5) le triplet produit obtenu est (36,77,85)
   Donc (36,77,85) est primitif et non premier
6. (13,84,85) est primitif (13 et 84 sont premiers entre eux) et non premier car triplet produit de (3, 4, 5) et (8,15,17).
7.

(16, 63, 65)	(25, 60, 65)	(33, 56, 65)	(39, 52, 65)
primitif	Pas primitif	primitif	Pas primitif
Pas premier produit de (12,5,13) et de (3,4,5)	premier	Pas premier Produit de (12 ,5,13) et (4,3,5)	premier

Pour la savoir s'ils sont premiers, on remarque que $65 = 13\times5$

Exercice académique 2 : carrés de Dirichlet

Le second carré contient une coquille : 18 aurait -par exemple- pu être remplacé par 0

1) N°1 : oui N°2 : oui N°3 : non par exemple le coefficient $a_{1,1} = 2 \neq \frac{7+2+1}{4} = 10/4$
2) Coquille sur, par exemple la première valeur en haut à gauche : 1 au lieu de 2.
3) On peut modifier deux coefficients extérieurs "consécutifs. Exemple :

	2	**1-r**	
3	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	**5+r**
0	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	2
	1	3	

4) Par factorisation puis par somme, on obtient "facilement le résultat.

5) On a : $M = \frac{b_1+b_8+a_{1,2}+a_{2,1}}{4}$, or M est le maximum de tous les coefficients. Par conséquent, tous les coefficients de la fraction sont plus petits, donc ils ne peuvent qu'égaux à M.

6) Cf la question précédente. Si on applique le même raisonnement pour le minimum (en remplaçant les ≤ par des ≥) on trouve que le minimum est également un coefficient extérieur.
7) Le maximum et le minimum sont atteints par des coefficients extérieurs, ici les coefficients sont tous nuls. Par conséquents tous les ai,j sont nuls !
8) En supposant qu'il existe deux solutions, par “différence” des deux, on obtient des coefficients extérieurs nuls, ces coefficients étant alors le minimum et le maximum du carré dont tous les coefficients sont alors nuls. D'où le résultat.

9) D'après la question 3), les carrés suivants sont des carrés magiques

	4/5	0	
1/5	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
	0	0	

	0	2/4	
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{7}{24}$	2/4
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
	0	0	c

	0	0	
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
1/2	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
	1/2	0	

	0	0	
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{7}{24}$	1/2
	0	1/2	

On multiplie les carrés par respectivement 5,4,2 et 2 et on les somme, ce qui donne :

	4	2	
1	$\frac{49}{24}$	$\frac{44}{24}$	2
1	$\frac{32}{24}$	$\frac{31}{24}$	1
	1	1	

Pour le second, on se sert des carrés :

	3/10	0	
7/10	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
	0	0	

	0	2/4	
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{7}{24}$	2/4
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
	0	0	

	0	0	
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
3/4	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
	1/4	0	

	0	0	
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
0	$\frac{2}{24}$	$\frac{7}{24}$	0
	0	2/2	

En multipliant par 10, 4, 4 et 2, respectivement on obtient :

	3	2	
7	$\frac{88}{24}$	$\frac{56}{24}$	2
3	$\frac{56}{24}$	$\frac{40}{24}$	0
	1	2	

D'après la question précédente, ce sont les deux seules solutions de leur problème respectif.

Exercice 3 académique : Anneaux ouroboriques

A. Anneaux ouroboriques

I. Doublets

1.
   a. 0010
   Non car 11 ne peut être obtenu

   b. 0101
   Non 11 ne peut pas être obtenu

   c. 1001
   Oui car on obtient bien 10, 00, 01 et 11.

2. 1100 est un autre anneau ouroborique.
3. Il en existe 4 : 0011,0110, 1100 et 1001. Remarque : ce sont en fait 4 anneaux identiques.

II. Triplets

1. Il en existe $2^3 = 8$: 000 , 001 , 010 , 011 , 100 , 101 , 110 et 111
2. Aucun n'est ouroboriques car 000 n'est pas atteint.
3. 00011101
4. Avec une série de cinq « 1 » il y en aura forcément trois qui seront collés.
   Deux cas :
   1111xxxx dans ce cas, on atteint 2 fois 111 donc on ne peut avoir tous les triplets.
   01110xxx et à la place de xxx il y aura 110 ou 101 ou 011 Dans tous les cas on ne peut attendre 000
5. Il sera constitué de quatre « 1 » et quatre « 0 ».
   Si cinq « 1 » et trois « 0 » : voir question 4.
   Si six « 1 » et deux « 0 » : on ne peut pas faire 000
   De même plus de six « 1 ». De même si plus de cinq « 0 » dans ce cas on ne pourra atteindre 111.
6. Il y en a deux : 01110100 et 01110001

III. Avec d'autres bases

a. Il en existe $3\times3 = 9$: 00 01 02 10 11 12 20 21 22
b. Il sera de taille 9
c. Par exemple : 001120221. Il y en a 27 différents.
d. Chaque chiffre apparait 3 fois.

B. Ourotore

1. Il y a $2^4 = 16$ carrés différents.
2.

$\boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}0&1\\1&1\end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}}$

3.

$$\boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}}$$